



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**

**Ingeniería Antisísmica**

**Introducción a la  
Dinámica Estructural**

**Ing. Rafael Salinas Basualdo**

## **DINAMICA ESTRUCTURAL**

- Estudio de las características y comportamiento de las estructuras debido a cargas dinámicas (varían en el tiempo).
  - Sismos
  - Viento
  - Cimentación de máquinas
  - Vibraciones
  - Propagación de ondas
  - Ensayos no destructivos

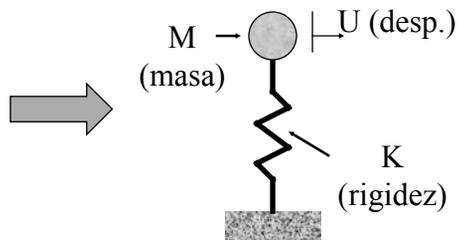
# SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD



Fuente: [urban.arq.virginia.edu](http://urban.arq.virginia.edu)

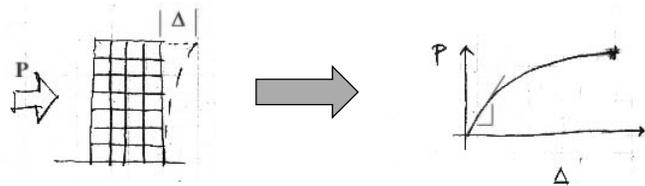
## DEFINICION

- Un sistema de un grado de libertad (1 GDL) se define como aquel que solo es posible un tipo de movimiento, es decir, la posición del sistema en cualquier instante puede ser definida por la de una sola coordenada.

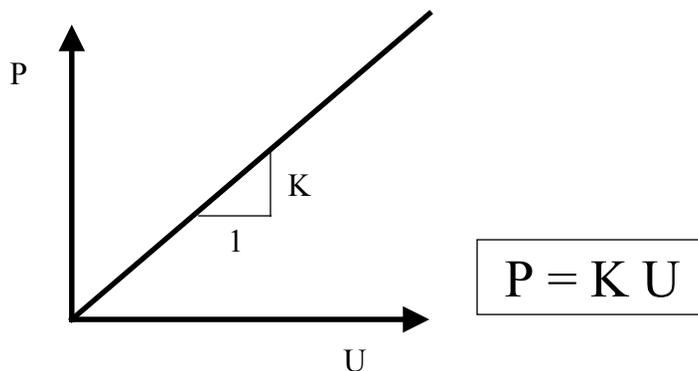


# RIGIDEZ

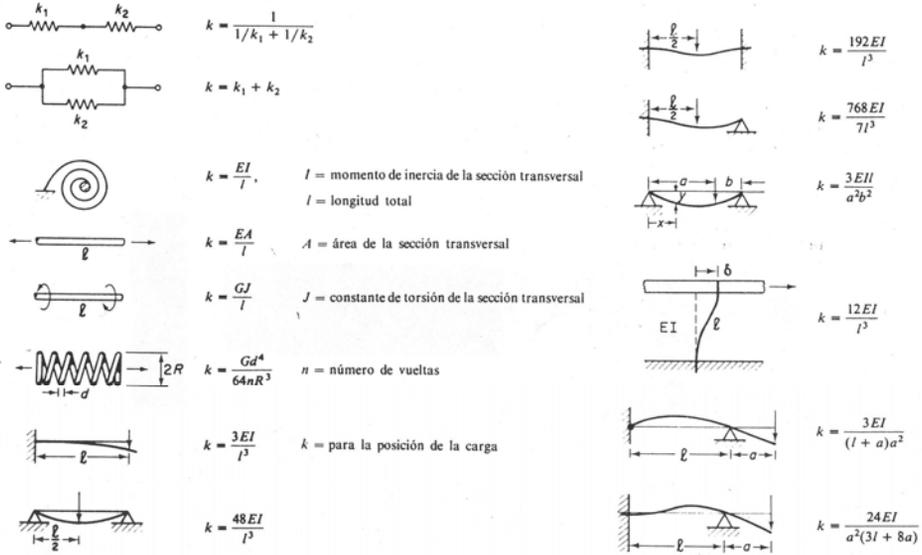
- Cuando se aplica una fuerza a una estructura, esta se desplazará en la dirección de la fuerza. La rigidez se define como el cociente entre la fuerza aplicada y el desplazamiento producido.
- Sistemas rígidos tienen deformaciones pequeñas (gran rigidez), y sistemas flexibles tienen deformaciones grandes (poca rigidez).



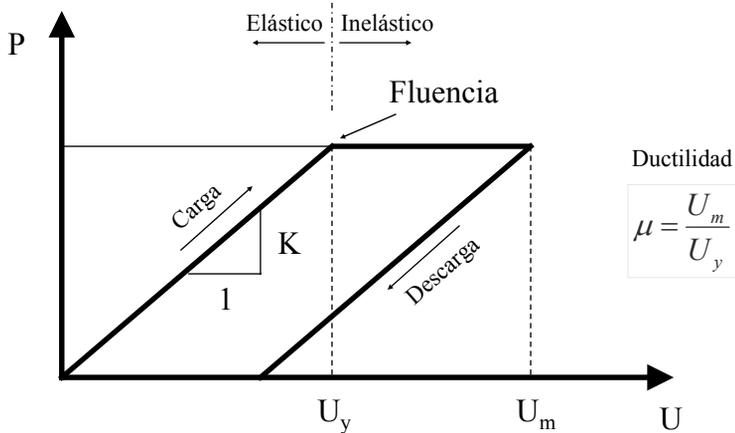
# RIGIDEZ (LINEAL-ELASTICO)



La rigidez elástica es determinada con fórmulas de la Mecánica de Materiales:

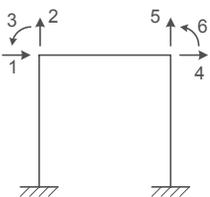


# RIGIDEZ

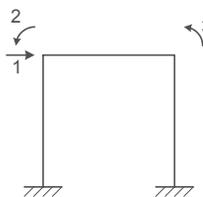


Algunas estructuras pueden ser idealizadas como sistemas de 1 GDL, como el pórtico de una crujía bajo la acción de una carga lateral:

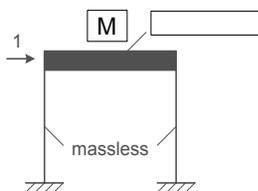
En estática, el pórtico tiene 6 GDL activos.



Considerando deformaciones axiales nulas, 3 GDL desaparecen.

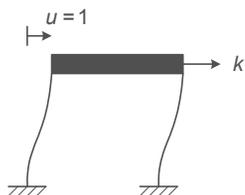


Solamente un GDL queda si el pórtico se supone como un piso (viga) rígido apoyado por columnas con masa relativamente pequeña.

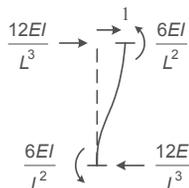


La masa de este sistema de 1 GDL es M, la masa del piso o techo.

La rigidez es determinada con fórmulas de la Mecánica de Materiales:



$$K = \frac{24EI}{L^3}$$



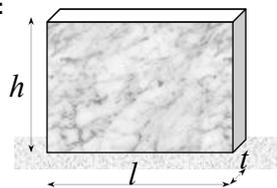
Considerando la flexibilidad de la viga, la rigidez lateral será:

$$k_v = \frac{I_v}{L_v}$$

$$k_c = \frac{I_c}{L_c}$$

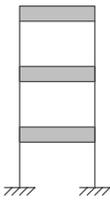
$$K_{\text{pórtico}} = \frac{24EI_c}{h^3} \left( \frac{1+6\gamma}{4+6\gamma} \right) \quad \gamma = k_v / k_c$$

La rigidez lateral de un muro es, considerando deflexiones por flexión y corte:

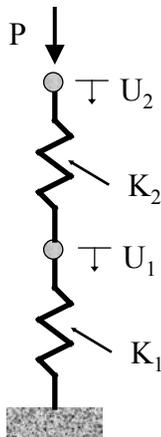


$$k_{\text{muro}} = \frac{Et}{4\left(\frac{h}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{h}{l}\right)}$$

## Sistemas de Masa Discreta y de Masa Distribuida

<p><b>Sistemas Discretos</b></p> 	<p>Número de frecuencias naturales igual al número de GDL</p>	<p>Forma de modo = vector</p> $\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix}$	<p>Las formas de modo quedan definidas con un factor multiplicativo. Convención: <math>\phi_1 = 1</math></p>
<p><b>Sistemas Distribuidos</b></p> 	<p>Número infinito de frecuencias naturales</p>	<p>Forma de modo = función</p> $\phi_1(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$	<p>Convención: <math>A = 1</math></p>

## SISTEMAS EQUIVALENTES (Serie)



Equilibrio  $P = F_1 = F_2$

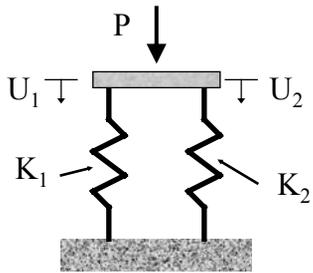
Compatibilidad  $U = U_1 + U_2$

Constitutivas  $F_1 = K_1 U_1$   
 $F_2 = K_2 U_2$

Sistema Equivalente  $P = K_e U$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

## SISTEMAS EQUIVALENTES (Paralelo)



Equilibrio  $P = F_1 + F_2$

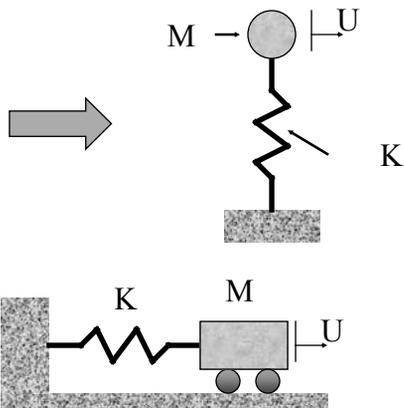
Compatibilidad  $U = U_1 = U_2$

Constitutivas  $F_1 = K_1 U_1$   
 $F_2 = K_2 U_2$

Sistema Equivalente  $P = K_e U$

$$K_e = K_1 + K_2$$

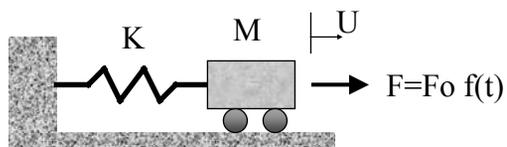
## MODELOS



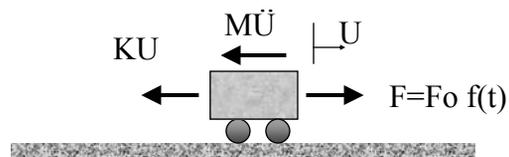
# ECUACION DE MOVIMIENTO

- Newton  $\Sigma F = Ma = M\ddot{U}$

- D'Alembert  $\Sigma F = 0$



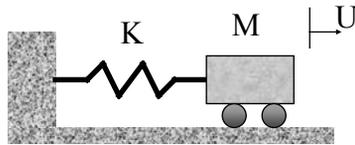
# DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



$$M\ddot{U} + KU = F = F_0 f(t)$$

Ecuacion diferencial de movimiento (equilibrio dinámico)

# VIBRACION LIBRE



$$M\ddot{U} + KU = 0$$

Solución de la ecuación diferencial de movimiento

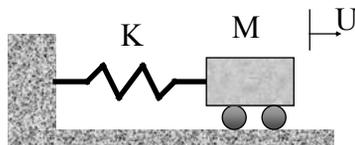
$$U = U_G$$

$$U = U_G = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t)$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 [A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t)]$$

$$(-M\omega^2 + K)(A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t)) = 0$$

# PROPIEDADES DINAMICAS



Frecuencia circular de vibración  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$  (rad/seg)

Periodo natural de vibración  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$  (seg)

Frecuencia natural de vibración  $f = \frac{1}{T}$  (Hertz, Hz, 1/seg)

# PROPIEDADES DINAMICAS



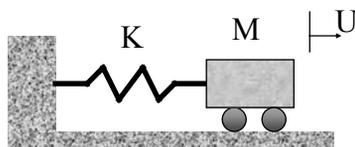
Estructura Rígida  
Periodo Corto  
Frecuencia Alta



Estructura Flexible  
Periodo Largo  
Frecuencia Baja

Fuente: [urban.arq.virginia.edu](http://urban.arq.virginia.edu)

## VIBRACION LIBRE



$$M\ddot{U} + KU = 0$$

$$U = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

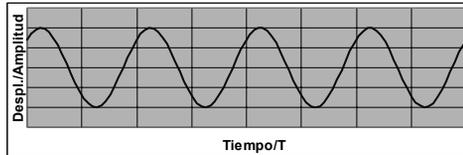
Condiciones iniciales:

$t=0$ , desplazamiento inicial  $U(0) = U_0$  y  
velocidad inicial  $\dot{U}(0) = \dot{U}_0$

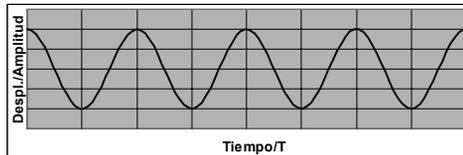
$$U = \dot{U}_0/\omega \operatorname{sen}(\omega t) + U_0 \operatorname{cos}(\omega t)$$

## VIBRACION LIBRE

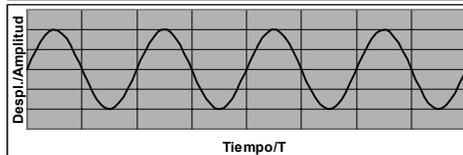
$$t=0, U(0) = U_0 \text{ y } \dot{U}(0) = \dot{U}_0$$



$$t=0, U(0) = U_0 \text{ y } \dot{U}(0) = 0$$



$$t=0, U(0) = 0 \text{ y } \dot{U}(0) = \dot{U}_0$$



## VIBRACION LIBRE

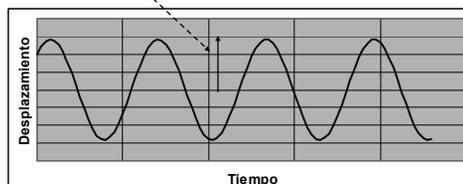
$$U = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \operatorname{cos}(\omega t) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$U = \dot{U}_0/\omega \operatorname{sen}(\omega t) + U_0 \operatorname{cos}(\omega t)$$

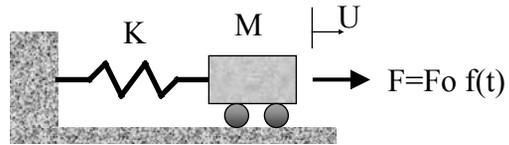
$$U = C \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad C = \sqrt{\left(\frac{\dot{U}_0}{\omega}\right)^2 + U_0^2}$$

C es la amplitud  
 $\phi$  es el ángulo de fase.

$$\tan \phi = \frac{U_0}{\dot{U}_0/\omega}$$



## VIBRACION FORZADA



$$M\ddot{U} + KU = F = F_0 f(t)$$

Solución de la ecuación diferencial de movimiento

$$U = U_G + U_p$$

## CARGA SUBITA



$$M\ddot{U} + KU = F_0$$

$$U_p = F_0/K$$

$$U = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + F_0/K$$

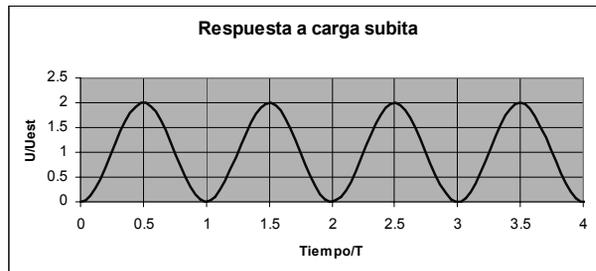
Si el sistema parte del reposo

$$t=0, U(0) = 0, \rightarrow B = -F_0/K$$

$$t=0, \dot{U}(0) = 0, \rightarrow A = 0$$

$$\rightarrow U = F_0/K (1 - \cos(\omega t)) = U_{est} (1 - \cos(\omega t))$$

# CARGA SUBITA



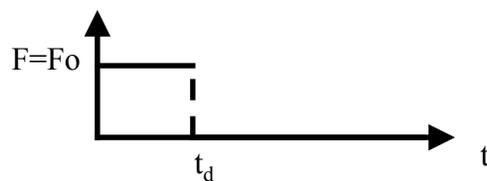
$$U = F_0/K (1 - \cos(\omega t)) = U_{est} (1 - \cos(\omega t))$$

$$U = U_{est} FAD$$

$$FAD = (1 - \cos(\omega t))$$

FAD, Factor de Amplificación Dinámica

# CARGA PULSO



Tramo 1,  $0 < t \leq t_d, U_p = F_0/K$

Tramo 2,  $t_d \leq t, U_p = 0, \text{vibración libre}$

Si el sistema parte del reposo

Tramo 1,

$$U = F_0/K (1 - \cos(\omega t))$$



$$FAD = (1 - \cos(\omega t))$$

# CARGA PULSO

Tramo 2,

$$U = A_2 \operatorname{sen}(\omega(t - t_d)) + B_2 \cos(\omega(t - t_d))$$

$$t = t_d, U(t_d) = F_0/K (1 - \cos(\omega t_d))$$

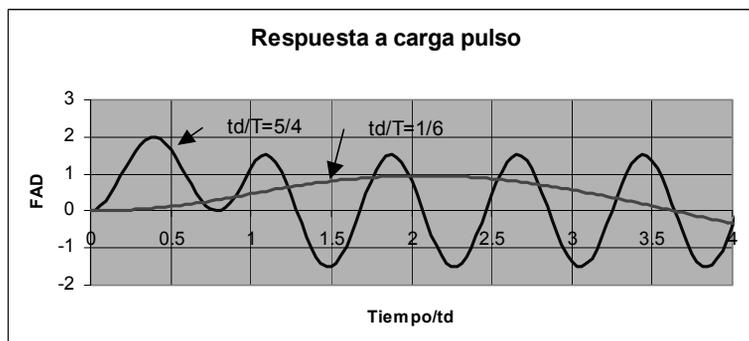
$$t = t_d, \dot{U}(t_d) = F_0/K (\omega \operatorname{sen}(\omega t_d))$$

$$U = F_0/K (\operatorname{sen}(\omega t_d) \operatorname{sen}(\omega(t - t_d)) + (1 - \cos(\omega t_d)) \cos(\omega(t - t_d)))$$

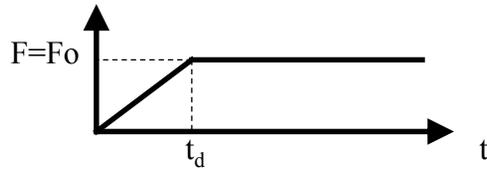
$$\rightarrow U = F_0/K (\cos(\omega(t - t_d)) - \cos(\omega t))$$

$$FAD = \cos(\omega(t - t_d)) - \cos(\omega t)$$

# CARGA PULSO



## CARGA RAMPA



Tramo 1,  $0 < t \leq t_d$ ,  $U_p = (Fo/K)(t/t_d)$

Tramo 2,  $t_d \leq t$ ,  $U_p = Fo/K$

Si el sistema parte del reposo

Tramo 1,

$t=0$ ,  $U(0) = 0$ ,  $\rightarrow B=0$

$t=0$ ,  $\dot{U}(0) = 0$ ,  $\rightarrow A = -(Fo/K)(1/\omega t_d)$

$\rightarrow U = Fo/K t_d ( t - \text{sen}(\omega t) / \omega )$

## CARGA RAMPA

Tramo 2,

$$U = A_2 \text{sen}(\omega(t - t_d)) + B_2 \cos(\omega(t - t_d)) + Fo/K$$

$$t = t_d, U(t_d) = Fo/K (1 - \text{sen}(\omega t_d) / \omega t_d)$$

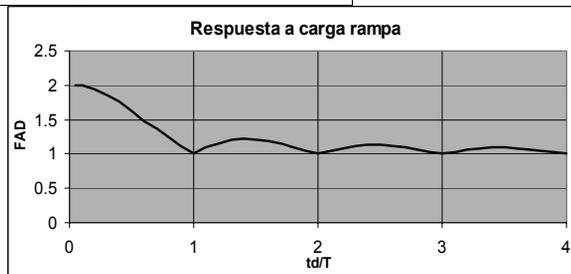
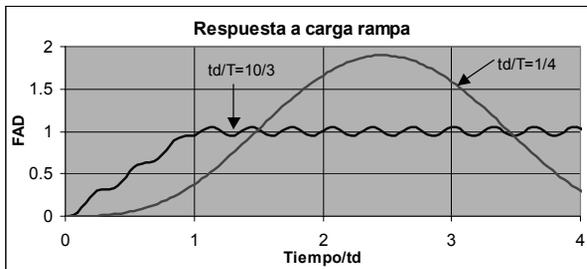
$$t = t_d, \dot{U}(t_d) = Fo/K t_d (1 - \cos(\omega t_d))$$

$$U = Fo/K (\text{sen}(\omega(t - t_d))/\omega t_d - \text{sen}(\omega t_d)/\omega t_d + 1)$$

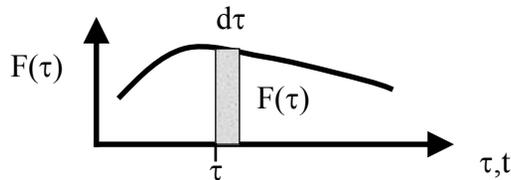
$\rightarrow$  Tramo 1,  $FAD = ( t/t_d - \text{sen}(\omega t) / \omega t_d )$

Tramo 2,  $FAD = \text{sen}(\omega(t - t_d))/\omega t_d - \text{sen}(\omega t_d)/\omega t_d + 1$

# CARGA RAMPA



# EXCITACION ARBITRARIA



Cuando  $t_0 = \tau$   $F(\tau) = m a = m \ddot{u}_0 = m \frac{dv}{d\tau} = m \frac{d\dot{u}_0}{d\tau}$

Velocidad inicial  $d\dot{u}_0 = \frac{F(\tau)d\tau}{m}$

Solución para  $du_0 = 0$  y  $d\dot{u}_0 > 0$

$$\frac{F(\tau)d\tau}{m\omega} \text{sen}\omega(t-\tau) \quad t \geq \tau$$

# EXCITACION ARBITRARIA

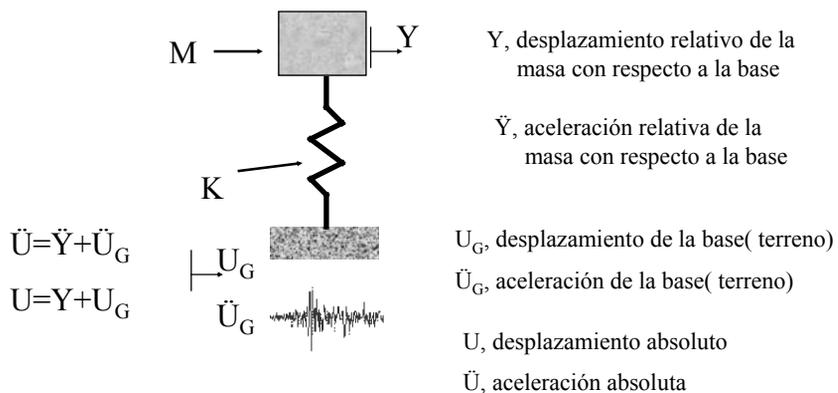
La respuesta total es la suma de la respuesta a cada impulso:

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen}\omega(t-\tau) d\tau$$

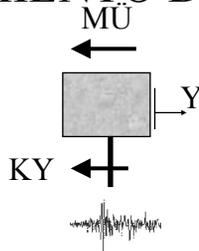
Es la llamada Integral de Duhamel, cuya solución completa es:

$$U(t) = \frac{\dot{U}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + U_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \text{sen}\omega(t-\tau) d\tau$$

# EXCITACION SISMICA MOVIMIENTO DE LA BASE



## MOVIMIENTO DE LA BASE



$$M\ddot{U} + KY = 0$$

$$M\dot{U} + KU = KU_G$$

$$M\ddot{Y} + KY = -M\ddot{U}_G$$

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G = -\ddot{U}_{G0} f(t)$$

## Amortiguamiento

- El amortiguamiento estructural no es viscoso.
- El amortiguamiento se debe a:
  - Amortiguamiento en elementos estructurales y juntas.
  - Amortiguamiento histerético por las características de la fuerza restauradora elasto-plástica.
  - En elementos no estructurales.
  - Por disipación de energía en el terreno.
- Los mecanismos no están bien entendidos.
- Dificultad para incluirlo exactamente en las ecuaciones de movimiento.
- Dificultad computacional en la solución.
- Sus efectos usualmente son aproximados mediante un amortiguador viscoso.

## Modelos de Amortiguamiento

- Métodos fenomenológicos (modela los mecanismos reales de disipación)
  - ↳ Histéresis Elasto-Plástico.
  - ↳ Fricción en las uniones estructurales.
  - ↳ Microfisuras en el material.
- Métodos simplificados
  - ↳ Introducción de amortiguador viscoso.
  - ↳ Se cuenta con una fracción del amortiguamiento crítico.

## Amortiguamiento Crítico

$\beta$  = Fracción de amortiguamiento crítico.

$\beta = 1 \implies$  amortiguamiento crítico.

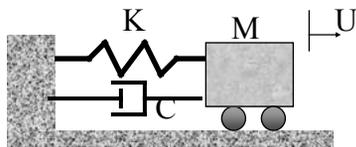
El amortiguamiento crítico marca la transición entre una respuesta oscilatoria y una respuesta no oscilatoria de una estructura.

# Valores Usuales de $\beta$

Nivel de esfuerzo	Tipo y condiciones de la estructura	Porcentaje de amortiguamiento crítico
Esfuerzo de trabajo, no mayor de la mitad del punto de fluencia, aproximadamente.	Tuberías vitales	1 a 2
	Acero soldado, concreto pretensado, concreto armado levemente fisurado	2 a 3
	Concreto armado altamente agrietado	3 a 5
	Acero remachado o empernado, estructuras de madera clavadas o empernadas	5 a 7
Justamente debajo o en el punto de fluencia.	Tubería de servicio público	2 a 3
	Acero soldado, concreto pretensado con pérdida parcial del pretensado	5 a 7
	Concreto pretensado con pérdida completa del pretensado	7 a 10
	Concreto armado	7 a 10
	Acero remachado y empernado, estructuras de madera empernadas	10 a 15
	Estructuras de madera clavadas	15 a 20

El valor real a adoptar depende del nivel de esfuerzos

## VIBRACION AMORTIGUADA



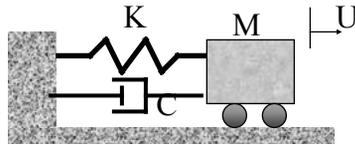
$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0$$

Solucion de la ecuacion diferencial de movimiento con amortiguamiento viscoso

$$U = e^{(-\beta\omega t)} (A \text{ sen}(\omega_D t) + B \text{ cos}(\omega_D t))$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \omega_D = \omega\sqrt{1-\beta^2} \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{C}{\sqrt{KM}}$$

## AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



Cuando  $\beta > 1$ , sistema sobreamortiguado, no hay vibración

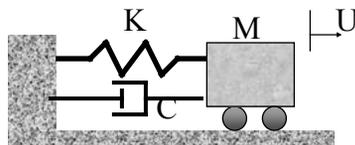
$$U = e^{(-\beta\omega t)} (A \sinh(\omega_D t) + B \cosh(\omega_D t))$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Cuando  $\beta = 1$ , sistema con amortiguamiento crítico, no hay vibración

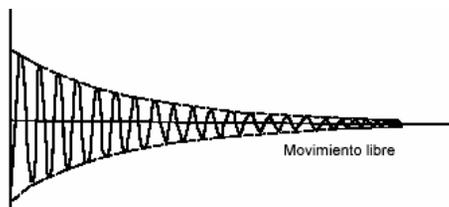
$$U = e^{(-\omega t)} (A + B t)$$

## AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



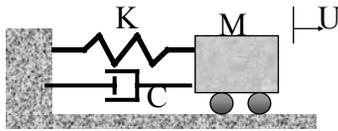
Cuando  $\beta < 1$ , sistema sub-amortiguado, hay vibración

$$U = e^{(-\beta\omega t)} (A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t))$$



## DECREMENTO LOGARITMICO (DL)

Logaritmo neperiano de la relación entre dos amplitudes (desplazamientos máximos) sucesivas

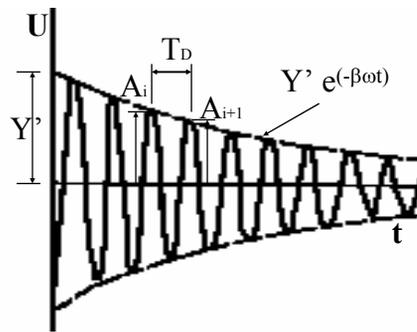


$$DL = \ln \left( \frac{A_i}{A_{i+1}} \right)$$

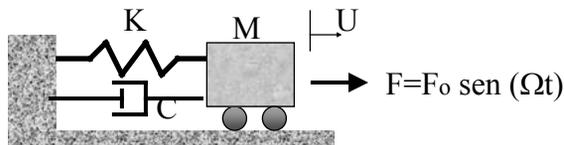
$$DL = \ln \left( \frac{e^{-\beta \omega t}}{e^{-\beta \omega (t+T_D)}} \right) = \ln e^{\beta \omega T_D} = \beta \omega T_D \quad \text{como } T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\beta^2}}$$

$$DL = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{si } \beta \ll 1: \quad DL = 2\pi\beta$$



## VIBRACIONES ARMONICAS



$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \sin(\Omega t)$$

Solucion de la ecuacion diferencial de movimiento

$$U = e^{(-\beta \omega t)} (A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)) + U_p(t)$$

$$U_p(t) = \frac{F_0}{K} \frac{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \sin(\Omega t) - 2\beta \frac{\Omega}{\omega} \cos(\Omega t)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

# VIBRACIONES ARMONICAS

Respuesta transitoria

$$U_g = e^{(-\beta\omega t)} (A \operatorname{sen}(\omega_D t) + B \operatorname{cos}(\omega_D t))$$

Respuesta permanente, parte forzada

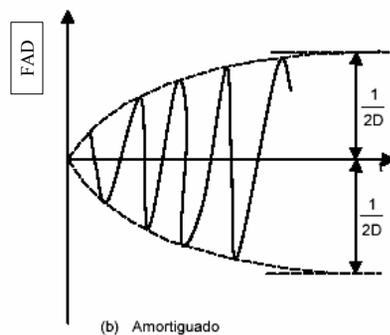
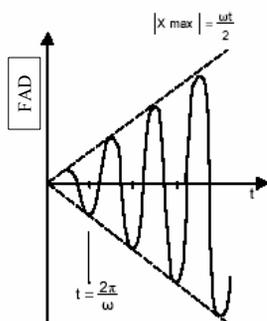
$$U_p(t) = \frac{F_0 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2\beta \frac{\Omega}{\omega} \operatorname{cos}(\Omega t)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Factor de Amplificación Dinámica Máxima, respuesta permanente:

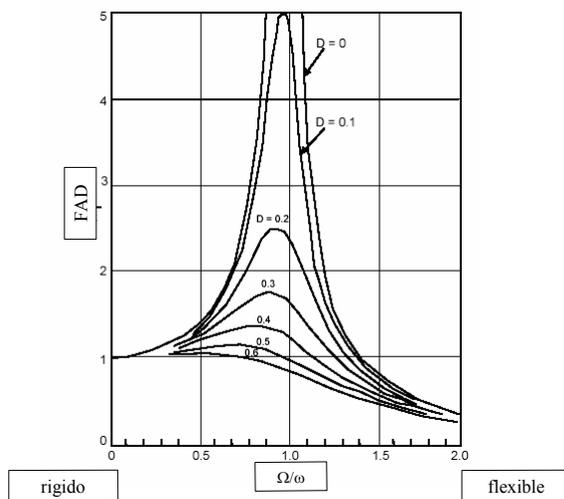
$$\operatorname{FAD}_{\operatorname{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2}}}$$

Cuando  $\Omega = \omega$ , fenómeno de resonancia

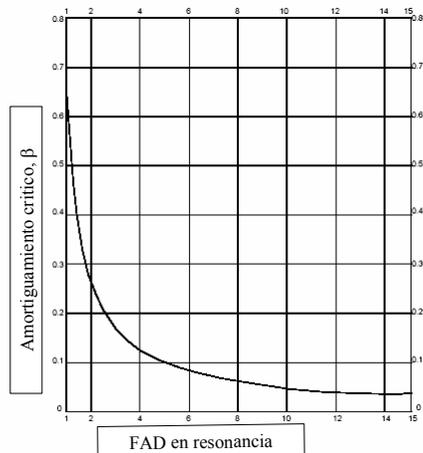
# RESONANCIA



## FAD máximo vs. relación de frecuencias

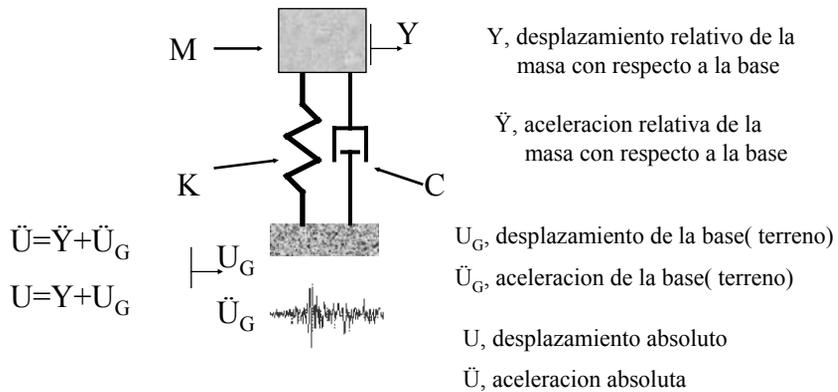


## RESONANCIA

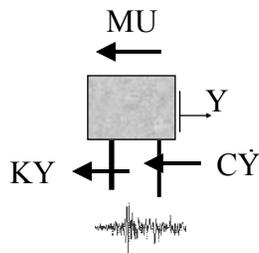


# EXCITACION SISMICA

## MOVIMIENTO DE LA BASE



## MOVIMIENTO DE LA BASE



$$M\ddot{U} + C\dot{Y} + KY = 0$$

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = KU_G + C\dot{U}_G$$

$$M\ddot{Y} + C\dot{Y} + KY = -M\ddot{U}_G$$

$$\ddot{Y} + 2\beta\omega\dot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G = -\ddot{U}_{G0} f(t)$$

# ESPECTRO DE RESPUESTA

$$\ddot{Y} + 2\beta\omega\dot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G = -\ddot{U}_{G0} f(t)$$

Si,  $\beta=0$ , sin amortiguamiento

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G$$

$$\ddot{Y} + \ddot{U}_G = -\omega^2 Y$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 Y$$

Aceleracion absoluta es proporcional al desplazamiento relativo (por el cuadrado de la frecuencia circular)

Definiendo:

$$S_d = \max |Y| (\omega, \beta) \quad \text{Espectro de desplazamientos relativos}$$

$$S_a = \max |\ddot{U}| (\omega, \beta) \quad \text{Espectro de aceleraciones absolutas}$$

$$S_a = \omega^2 S_d$$

$$S_v = \omega S_d \quad \text{Espectro de pseudovelocidades}$$

# ESPECTRO DE RESPUESTA

$$\ddot{Y} + 2\beta\omega\dot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G = -\ddot{U}_{G0} f(t)$$

con amortiguamiento

$$\ddot{Y} + 2\beta\omega\dot{Y} + \omega^2 Y = -\ddot{U}_G$$

$$\ddot{Y} + \ddot{U}_G = -\omega^2 Y - 2\beta\omega\dot{Y}$$

$$\ddot{U} = -\omega^2 Y - 2\beta\omega\dot{Y}$$

$$S_a = \omega^2 S_d$$

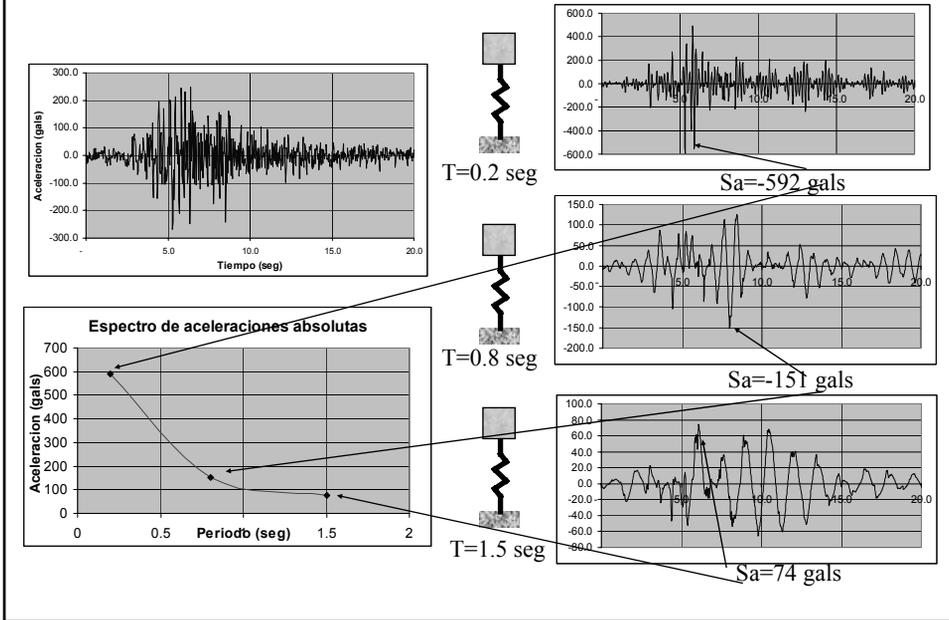
Sigue siendo válida esta expresión en sistemas amortiguados?

En la literatura se menciona que ya no es válida y se cambia la definición a:

$$S_a = \max |\ddot{U}| (\omega, \beta) \quad \text{Espectro de pseudoaceleraciones absolutas}$$

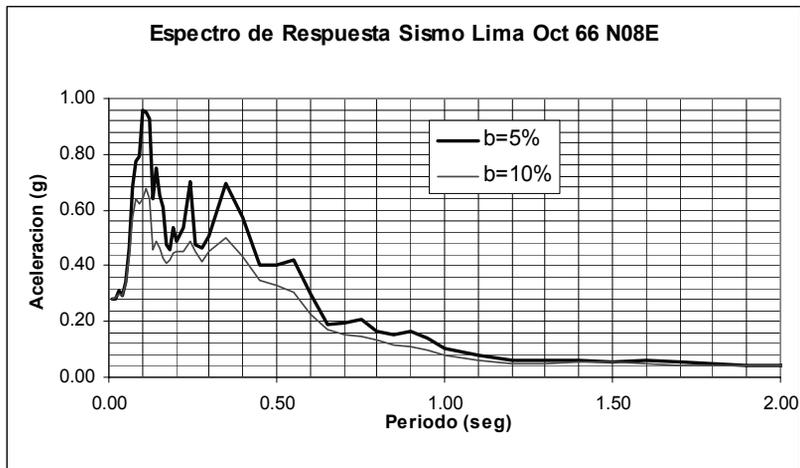
Sin embargo, la expresion sigue siendo válida, ya que para valores máximos del desplazamiento la velocidad es cero, entonces no se debería cambiar la definición.

# ESPECTRO DE RESPUESTA



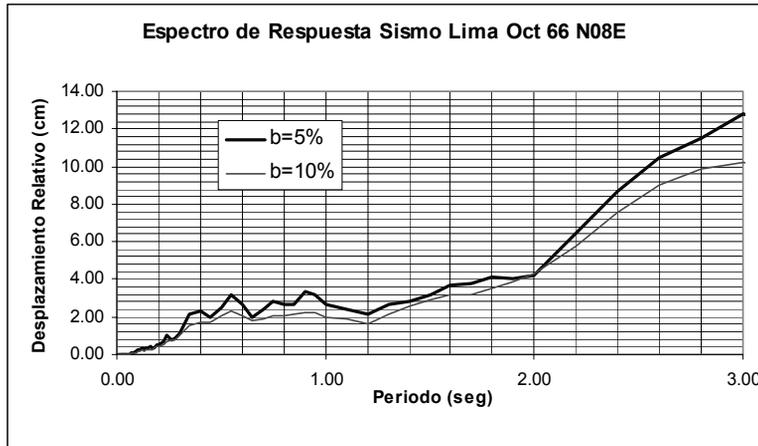
# ESPECTRO DE RESPUESTA

## Espectros de aceleraciones absolutas



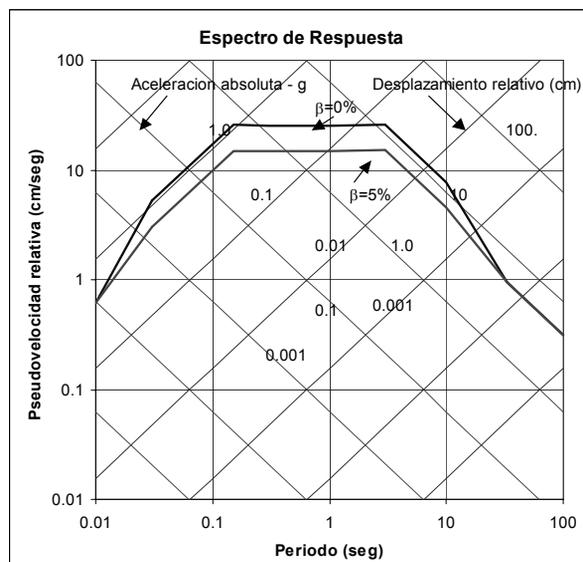
# ESPECTRO DE RESPUESTA

## Espectros de desplazamientos relativos

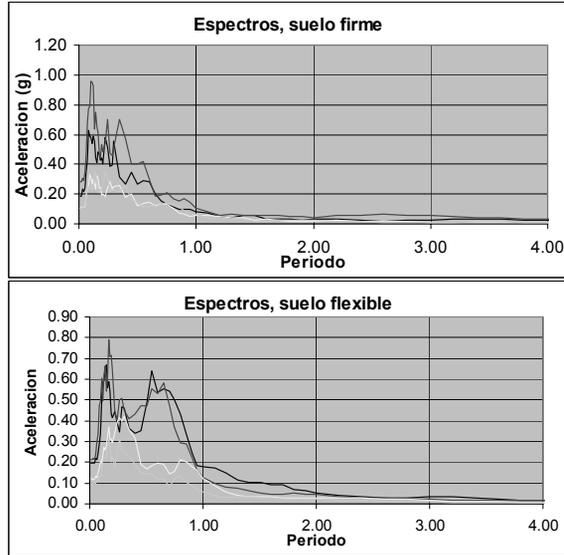


# ESPECTRO DE RESPUESTA

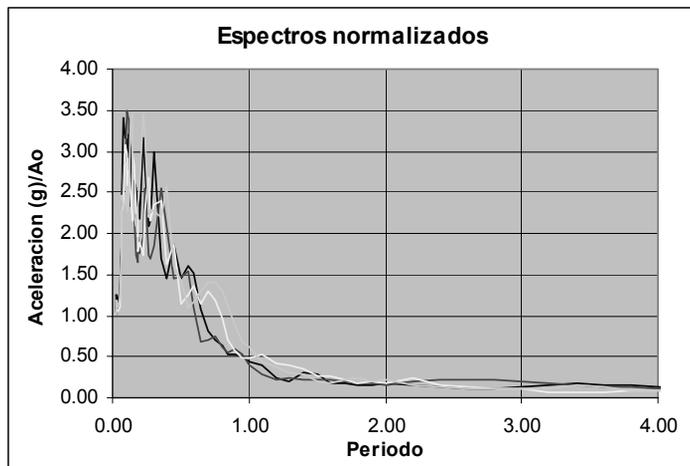
## Espectro Tripartito



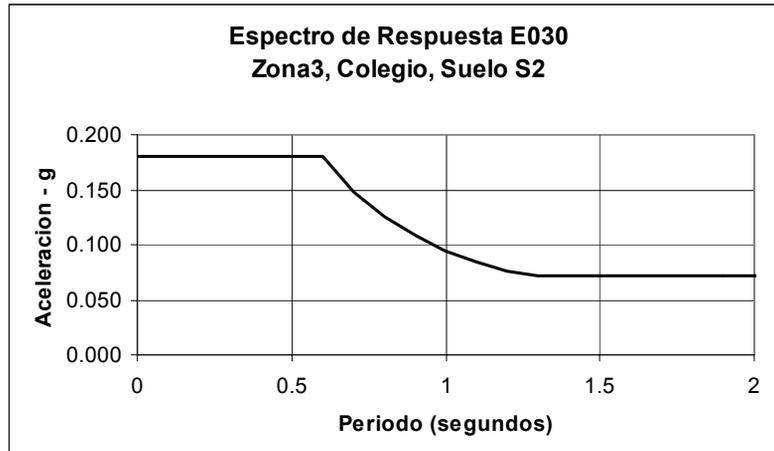
# ESPECTRO DE RESPUESTA



# ESPECTRO DE RESPUESTA



# ESPECTRO DE DISEÑO

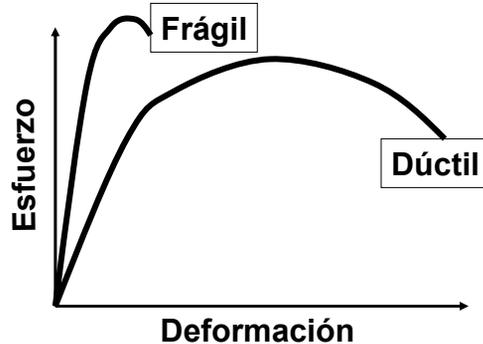


## DUCTILIDAD

- Medida de la capacidad de un material de deformarse en estado inelástico antes de su fractura.
- A nivel de un material, se cuantifica mediante el valor de la deformación en el punto de fractura entre la deformación en el punto de fluencia.
- Ejemplos:
  - Acero con contenido bajo de carbono
  - Aluminio

**Lo contrario de la ductilidad es la fragilidad.**

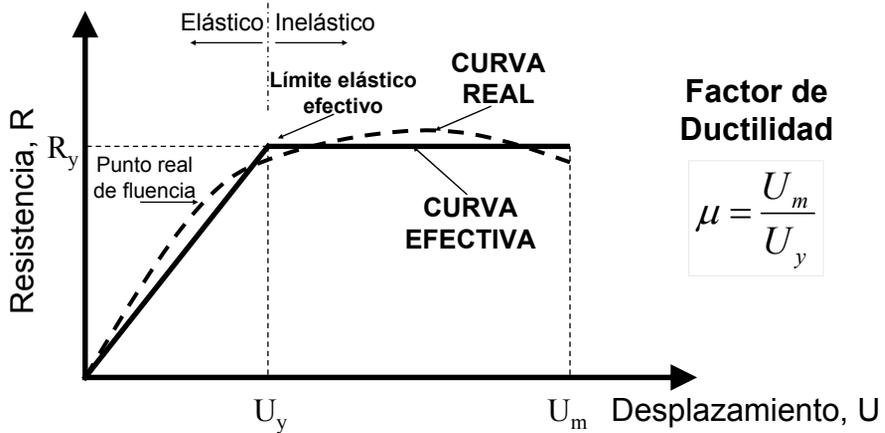
- La fragilidad es una medida de la incapacidad de un material de deformarse antes de su fractura.
- Ejemplos: vidrio, acero con alto contenido de carbono, concreto simple, cerámicos



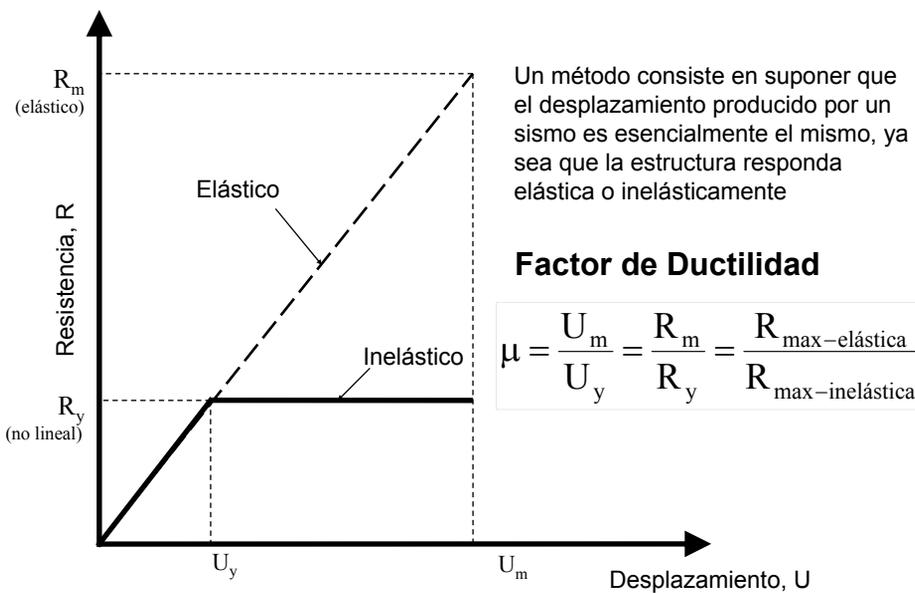
## **DUCTILIDAD**

- A nivel de un elemento estructural, es una medida del grado de deformación plástica que puede soportar antes de la falla.
- **Importancia:**
  - Indica el grado al cual una estructura se deformará plásticamente antes de la falla.
  - Los reglamentos de D.S.R. admiten que las estructuras incurrieren en zonas de comportamiento inelástico durante las cuales se disipe gran parte de la energía introducida por el sismo.

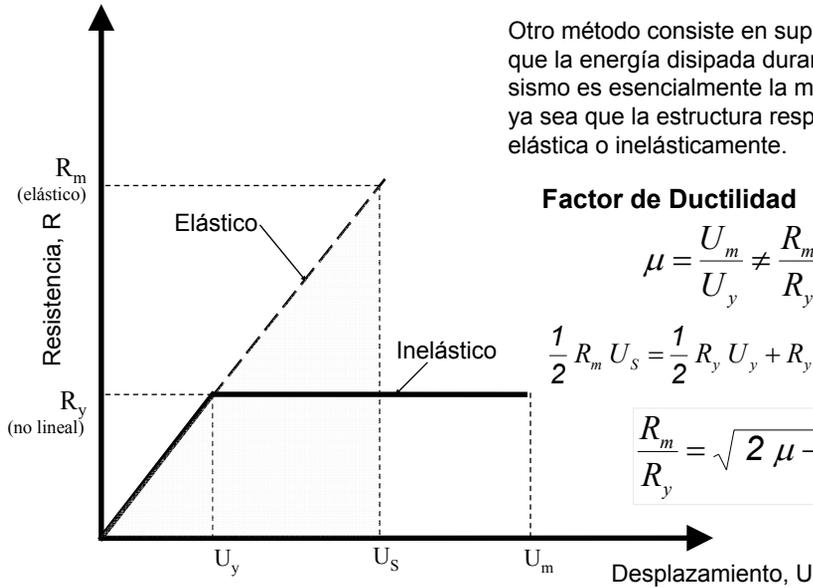
# FACTOR DE DUCTILIDAD



# FACTOR DE DUCTILIDAD

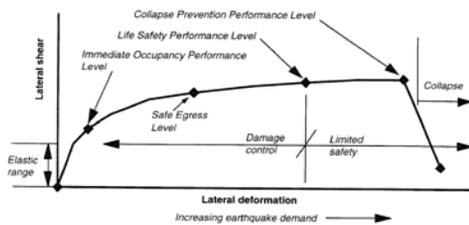


# FACTOR DE DUCTILIDAD

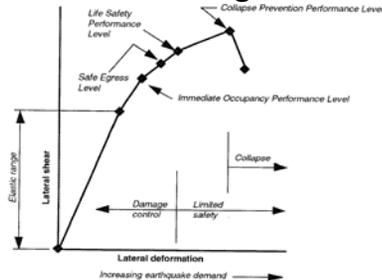


## Ductilidad y Demanda Sísmica en Estructuras

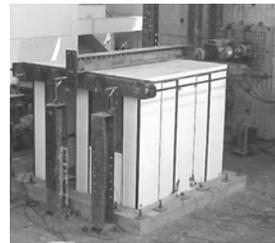
### Estructuras dúctiles



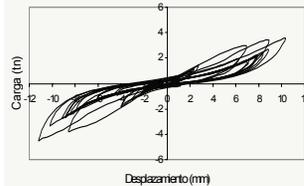
### Estructuras frágiles



Es importante conocer el comportamiento de las estructuras ante cargas cíclicas, pues es el tipo de sollicitación que impondrá el sismo.



Curva Histerética



Las estructuras deben ser capaces de desarrollar lazos de histéresis con áreas grandes, y ser estables en ciclos sucesivos.